相対双曲群の境界と粗幾何学

深谷友宏

東北大学

2015 年 9 月 16 日

はじめに

この講演の内容は主に
愛媛大学の尾國新一さんとの共同研究に基づきます.

もくじ

Novikov 予想

- M： n 次元多様体
- $\mathcal{L}(M) = \{L_k(p_1, \ldots, p_k)\} \in \bigoplus_{k \in N} H^{4k}(M; \mathbb{Q})$：$\mathcal{L}$-類.
  - $L_1 = \frac{1}{3}p_1$, $L_2 = \frac{1}{45}(7p_2 - p_1^2)$, $L_3 = \frac{1}{945}(62p_3 - 13p_2p_1 + 2p_1^3), \ldots$
- $G := \pi_1(M)$： 基本群
- BG：G の分類空間. (i.e. $\pi_1(BG) = G, \pi_i(BG) = \{0\} \quad \forall i \geqslant 2$)
- $\varphi \colon M \to BG$：普遍被覆 $\tilde{M} \to M$ の分類写像
- $x \in H^\bullet(BG; \mathbb{Q})$.

予想 (Novikov 予想)

次で定義される高次符号数はホモトピー不変量である.

$$\langle \varphi^\bullet(x) \cup \mathcal{L}(M), [M] \rangle \in \mathbb{Q}.$$

Novikov 予想

- M： n 次元多様体
- $\mathcal{L}(M) = \{L_k(p_1, \ldots, p_k)\} \in \bigoplus_{k \in N} H^{4k}(M; \mathbb{Q})$：$\mathcal{L}$-類.
  - $L_1 = \frac{1}{3}p_1$, $L_2 = \frac{1}{45}(7p_2 - p_1^2)$, $L_3 = \frac{1}{945}(62p_3 - 13p_2p_1 + 2p_1^3), \ldots$
- $G := \pi_1(M)$： 基本群
- BG：G の分類空間. (i.e. $\pi_1(BG) = G, \pi_i(BG) = \{0\} \quad \forall i \geqslant 2$)
- $\varphi \colon M \to BG$：普遍被覆 $\tilde{M} \to M$ の分類写像
- $x \in H^\bullet(BG; \mathbb{Q})$.

予想 (Novikov 予想)

次で定義される高次符号数はホモトピー不変量である.

$$\langle \varphi^\bullet(x) \cup \mathcal{L}(M), [M] \rangle \in \mathbb{Q}.$$

Novikov 予想

- M： n 次元多様体
- $\mathcal{L}(M) = \{L_k(p_1, \dots, p_k)\} \in \bigoplus_{k \in N} H^{4k}(M; \mathbb{Q})$：$\mathcal{L}$-類.
  - $L_1 = \frac{1}{3}p_1,\ L_2 = \frac{1}{45}(7p_2 - p_1^2),\ L_3 = \frac{1}{945}(62p_3 - 13p_2p_1 + 2p_1^3), \dots$
- $G := \pi_1(M)$： 基本群
- BG：G の分類空間. (i.e. $\pi_1(BG) = G, \pi_i(BG) = \{0\} \quad \forall i \geqslant 2$)
- $\varphi\colon M \to BG$：普遍被覆 $\tilde{M} \to M$ の分類写像
- $x \in H^\bullet(BG; \mathbb{Q})$.

予想 (Novikov 予想)

次で定義される高次符号数はホモトピー不変量である.

$$\langle \varphi^\bullet(x) \cup \mathcal{L}(M), [M] \rangle \in \mathbb{Q}.$$

単連結の場合：Hirzebruch 符号数定理

- $\mathcal{L}(M) = \{L_k(p_1, \ldots, p_k)\} \in \bigoplus_{k\in N} H^{4k}(M;\mathbb{Q})$：$\mathcal{L}$-類.
- $\pi_1(M) = \{0\}$： 単連結
- この場合，高次符号数は $\langle \mathcal{L}(M), [M]\rangle$ のみ.
- $\dim M = 4n$ の場合を考える.
  $\left(\dim M \not\equiv 0 \mod 4 \text{ なら } \langle \mathcal{L}(M), [M]\rangle = 0\right)$

定義

次の非退化な二次形式の符号数を，$\mathrm{sgn}(M)$ と表す.

$$H^{2n}(M;\mathbb{Q}) \otimes H^{2n}(M;\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q} : \quad x \otimes y \mapsto \langle x \cup y, [M]\rangle$$

$\mathrm{sgn}(M)$ はホモトピー不変量.

定理 (Hirzebruch)

多様体の符号数は $\mathcal{L}$-種数に等しい.

$$\mathrm{sgn}(M) = \langle \mathcal{L}(M), [M]\rangle.$$

高次符号数の書き換え

- 高次符号数：各コホモロジー元 $x \in H^\bullet(BG;\mathbb{Q})$ 毎に定まる.
- キャップ積を用いて書き直すと

$$\langle \varphi^\bullet(x) \cup \mathcal{L}(M), [M] \rangle = \langle x, \varphi_\bullet([M] \cap \mathcal{L}(M)) \rangle$$

- $x \in H^\bullet(BG;\mathbb{Q})$ を全て動かした時の高次符号数の集合は，以下のホモロジー元 (高次 $\mathcal{L}$-類) で決定される.

$$\mathcal{L}_G(M) := \varphi_\bullet([M] \cap \mathcal{L}(M)) \in H_\bullet(BG;\mathbb{Q}).$$

BG のホモロジーに住んでいる元 $\mathcal{L}_G(M)$ のホモトピー不変性が問題

高次符号数の書き換え: 有理 assembly 写像

- M: 多様体
- $G := \pi_1(M)$

命題

有理 *assembly* 写像 A_G が単射 $\Rightarrow$ G に対する *Novikov* 予想が成立.

$$\begin{array}{ccc} A_G\colon H_\bullet(BG;\mathbb{Q}) & \longrightarrow & L_\bullet(\mathbb{Z}G)\otimes\mathbb{Q} \\ \Cup & & \Cup \\ \mathcal{L}_G(M) & \longmapsto & A_G(\mathcal{L}_G(M)) \end{array}$$

証明.

$A_G(\mathcal{L}_G(M))$ がホモトピー不変量であることが，手術理論の帰結として知られている. □

assembly 写像の単射性を示すための 3 つの手法

- 代数＋位相幾何学（代数的 K, L-理論，位相幾何学，ホモトピー論）
- 解析的手法（C^* 環，KK-理論）
- 粗幾何学による手法（C^* 環，K-理論，粗代数的位相幾何学）

解析的手法 Baum-Connes, Kasparov, $\cdots$

- G：有限生成群，（簡単のため，ねじれ元を持たないと仮定する）
- $C_r^*(G)$：被約群 C^* 環

予想 (Baum-Connes)

次の解析的 *assembly* 写像は同型である.

$$A_G^{\mathrm{BC}} \colon K_\bullet(BG) \to K_\bullet(C_r^*(G)).$$

命題

- $A_G^{\mathrm{BG}} \otimes 1_{\mathbb{Q}}$ 単射 $\Rightarrow$ G に対する *Novikov* 予想が成立.
- $A_G^{\mathrm{BG}} \otimes 1_{\mathbb{Q}}$ 単射 $\Rightarrow$ G に対する *Gromov-Lawson* 予想が成立.

Baum-Connes 予想の現状 (のごく一部の紹介)

予想 (Baum-Connes)

次の解析的 *assembly* 写像は同型である.

$$A_G^{\mathrm{BC}}\colon K_\bullet(BG) \to K_\bullet(C_r^*(G)).$$

群	単射	同型
$\mathbb{Z}^n$	◯	◯
従順群	◯	◯
a-T-menable	◯	Higson-Kasparov
双曲群	◯	V.Lafforgue, Mineyev-Yu
$SL(2,\mathbb{Z})$	◯	◯
$SL(3,\mathbb{Z})$	◯	絶望的

代数的位相幾何学＋解析 (Roe, Higson, Yu,$\cdots$)

- Y：固有な距離空間（すなわち有界閉集合はコンパクト）.
- $KX_\bullet(Y)$：Y の粗 K-ホモロジー
- $C^*(Y)$：Y の Roe 代数と呼ばれる C^* 環.

予想 (粗 Baum-Connes 予想)

次の粗 *assembly* 写像は同型である.

$$\mu_Y\colon KX_\bullet(Y) \to K_\bullet(C^*(Y)).$$

命題

有限生成群 G を考える. BG を実現する有限単体複体が存在すると仮定. $Y = (G, \text{語距離})$ とする.

- μ_G が同型 $\Rightarrow$ G に対する *Novikov* 予想が成立.
- $\mu_G \otimes 1_{\mathbb{Q}}$ が単射 $\Rightarrow$ G に対する *Gromov-Lawson* 予想が成立.

粗幾何学の利点

粗 assembly 写像 $\mu_Y\colon KX_\bullet(Y) \to K_\bullet(C^*(Y))$.

- $KX_\bullet(-)$, $K_\bullet(C^*(-))$：粗ホモロジー論
- Mayer-Vietoris の原理：$Y = A \cup B$ と分解する.
  $\mu_A, \mu_B, \mu_{A\cap B}$ が同型 $\Rightarrow$ μ_Y も同型.
  - $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, 0] \cup \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$.

注意　粗ホモロジー論 $\fallingdotseq$ 一点コンパクト化の被約ホモロジー
i.e. $Y \times [0, \infty)$ の粗ホモロジーは消える.

- 粗ホモトピーで変形しても不変.
  - $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{H}^n$ は粗同型ではないが，粗ホモトピー同値である.
    $\mu_{\mathbb{R}^n}$ 同型 $\Rightarrow$ $\mu_{\mathbb{H}^n}$ も同型.

粗幾何学の利点

粗 assembly 写像 $\mu_Y \colon KX_\bullet(Y) \to K_\bullet(C^*(Y))$.

- $KX_\bullet(-)$, $K_\bullet(C^*(-))$：粗ホモロジー論
- Mayer-Vietoris の原理：$Y = A \cup B$ と分解する．
  $\mu_A, \mu_B, \mu_{A\cap B}$ が同型 $\Rightarrow$ μ_Y も同型．
  - $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times (-\infty, 0] \cup \mathbb{R}^{n-1} \times [0, \infty)$.

注意　粗ホモロジー論 $\fallingdotseq$ 一点コンパクト化の被約ホモロジー
i.e.　$Y \times [0, \infty)$ の粗ホモロジーは消える．

- 粗ホモトピーで変形しても不変．
  - $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{H}^n$ は粗同型ではないが，粗ホモトピー同値である．
    $\mu_{\mathbb{R}^n}$ 同型 $\Rightarrow$ $\mu_{\mathbb{H}^n}$ も同型．

定理 (Higson-Roe, Willet)

測地的 *Gromov* 双曲空間に対して粗 *Baum-Connes* 予想が成立する.

定理 (Higson-Roe, Willet, O-F)

CAT(0)-空間（より一般に *Busemann* の意味で非正曲率空間）に対し，粗 *Baum-Connes* 予想が成立する.

定理 (Yu)

固有距離空間 Y が *Hilbert* 空間へ粗埋め込み可能 $\Rightarrow$ Y に対して粗 *Baum-Connes* 予想が成立する.

注意

- Gromov 双曲空間が有界幾何学を持たない場合，Hilbert 空間へ埋め込めるか分かっていない.
- 一般に CAT(0)-群が Hilbert 空間に埋め込めるかどうかは分かっていない.

もくじ

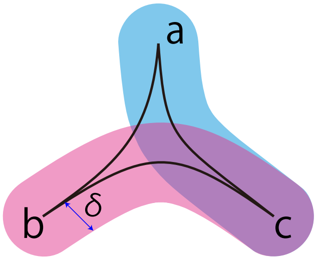
Gromov 双曲空間

Y を測地的距離空間とする．$\delta \geqslant 0$ を固定する．

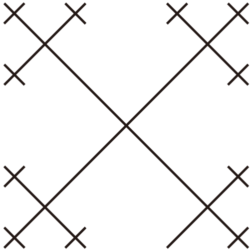
定義

任意の測地三角形が δ-細い，すなわち，任意の三点 $a, b, c \in Y$ に対し，辺 $\overline{ab}$ が和集合 $\overline{bc} \cup \overline{ca}$ の δ-近傍に含まれる時，Y は δ-双曲的であるという．

δ-thin triangle



Tree is 0-hyperbolic



双曲群

定義

測地的距離空間 Y が（Gromov）双曲的 $\Leftrightarrow \exists\delta$, Y は δ-双曲的.

定義

G：有限生成群

$$G \text{ が双曲群} \overset{\text{def}}{\iff} G \text{ の Cayley グラフが Gromov 双曲的}$$

$$\iff G \text{ がある Gromov 双曲空間 } Y \text{ に等長かつ}$$

固有，ココンパクトに作用する

例

- 自由群 $F_2 = \langle a, b \rangle$
- 種数 2 以上の閉 Riemann 面の基本群
- 双曲空間 $\mathbb{H}^n$ の一様（ココンパクト）格子 Λ

相対双曲群の例：$\mathbb{H}^n$ の非一様格子

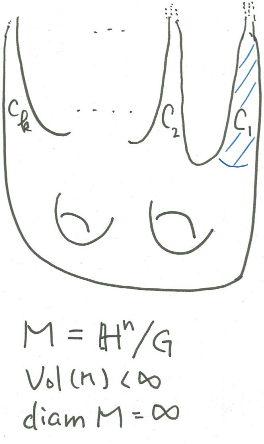
- $G < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ 非一様格子, $(n \geqslant 3)$
- $M := \mathbb{H}^n/G$, 非コンパクト双曲多様体,
- $G \cong \pi_1(M), \quad \mathrm{Vol}(M) < \infty, \quad \mathrm{Diam}(M) = \infty$,
- M は有限個のカスプ $C_1, \ldots, C_k$ を持つ.
- カスプの $\mathbb{H}^n \approx \tilde{M} \to M$ へ持ち上げの連結成分をホロボールと呼ぶ.
- 各 C_i に対して，対応するホロボールを一つづつ選び，$\tilde{C}_i$ と名付ける.

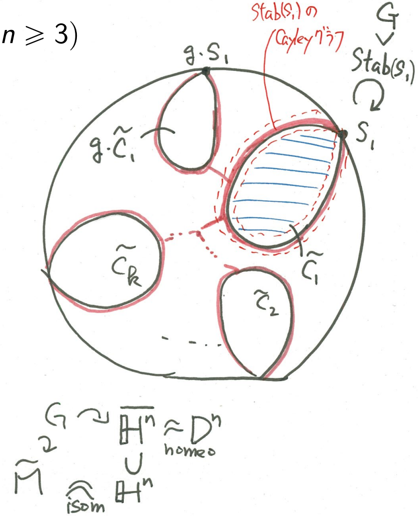
相対双曲群の例：$\mathbb{H}^n$ の非一様格子

- $G < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ 非一様格子, $(n \geqslant 3)$
- $M := \mathbb{H}^n/G$, 非コンパクト双曲多様体,
- $G \cong \pi_1(M)$, $\quad \mathrm{Vol}(M) < \infty$, $\quad \mathrm{Diam}(M) = \infty$,
- M は有限個のカスプ $C_1, \ldots, C_k$ を持つ.
- カスプの $\mathbb{H}^n \approx \tilde{M} \to M$ へ持ち上げの連結成分をホロボールと呼ぶ.
- 各 C_i に対して，対応するホロボールを一つづつ選び，$\tilde{C}_i$ と名付ける.

相対双曲群の例：$\mathbb{H}^n$ の非一様格子

- $G < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ 非一様格子, $(n \geqslant 3)$

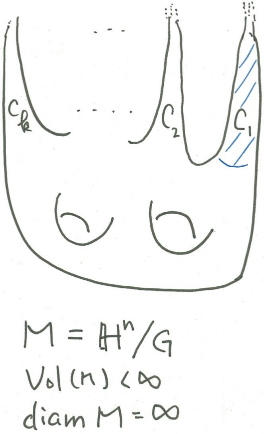


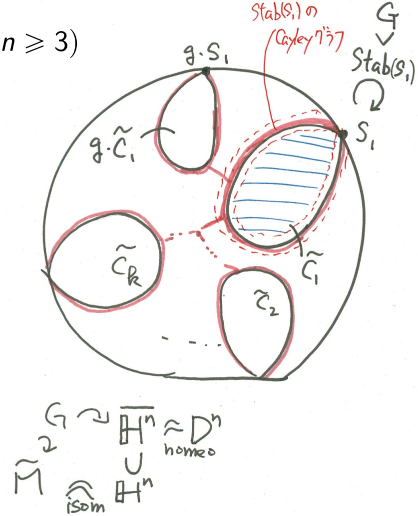


- $G > \mathrm{Stab}(s_1) \geqslant \mathbb{Z}^{n-1}$
- 双曲群は $\mathbb{Z}^2$ を部分群として含まない $\Rightarrow$ G は双曲群ではない

相対双曲群の例：$\mathbb{H}^n$ の非一様格子

- $G < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ 非一様格子, $(n \geqslant 3)$





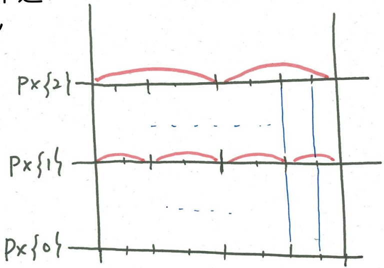
- G のケーリーグラフは, $\mathbb{H}^n \backslash \left(\cup_{1 \leqslant i \leqslant k} \bigcup_g g\tilde{C}_i \right)$ に粗同値

組み合わせ論的ホロボール

定義

(P, d) 距離空間とする．次で定まるグラフを P を底とする組み合わせ論的ホロボールと呼び， $\mathcal{H}(P)$ で表す．

- 頂点 $\mathcal{H}(P)^{(0)} = P \times (\mathbb{N} \cup \{0\})$.
- 辺 $\mathcal{H}(P)^{(1)}$ は次の二種類からなる．
  1. 整数 $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ と $p, q \in P$ s.t. $0 < d(p, q) \leqslant 2^l$, なる二点に対し $(p, l) \sim (q, l)$: 水平辺
  2. 整数 $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ と点 $p \in P$ に対し $(p, l) \sim (p, l+1)$: 垂直辺



補題

$\mathcal{H}(P)$ は *Gromov* 双曲的

お約束ごと

- G：有限生成群
- $\mathbb{P} = \{P_1, \dots, P_k\}$：$G$ の部分群の有限族
  ($\sharp P_i = \infty$, $[G : P_i] = \infty$)

- 以下を満たすように，G の元の列 $g_1, g_2, \dots$ を選ぶ．
  各 $r = 1, \dots, k$, に対し，次の写像は全単射：

$$\mathbb{N} \to G/P_r : a \mapsto g_{ak+r} P_r$$

- 整数 $i = ak + r \in \mathbb{N}$ に対し $(i) := r$ と定める (i の k に寄る剰余)
- 全てのコセットの集合 $\bigsqcup_{r=1}^{k} G/P_r$ は次の写像で順序付けられる．

$$\mathbb{N} \ni i \mapsto g_i P_{(i)}.$$

お約束ごと

- $\mathcal{S}$：G の生成系.
- $d_{\mathcal{S}}$：$\mathcal{S}$ による G の語距離.
- 各コセット $g_i P_{(i)}$ に $d_{\mathcal{S}}$ を制限した距離 d_i を入れる.
- $\mathcal{H}(g_i P_{(i)})$：$(g_i P_{(i)}, d_i)$ を底とするホロボール.
- $\mathcal{H}(g_i P_{(i)})$ の 0 階部分はケーリグラフ $\Gamma = \mathrm{Cayley}(G, \mathcal{S})$ に埋め込める.

定義

全ての $i \in \mathbb{N}$ に対し，$\mathcal{H}(g_i P_{(i)})$ を to $\Gamma = \mathrm{Cayley}(G, \mathcal{S})$ に貼り付けた空間

$$X(G, \mathbb{P}, d_G) = \Gamma \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}(g_i P_{(i)}).$$

を添加空間（augmented space）と呼び， $X(G, \mathbb{P}, d_G)$ で表す.

お約束ごと

定義

全ての $i \in \mathbb{N}$ に対し，$\mathcal{H}(g_i P_{(i)})$ を to $\Gamma = \mathrm{Cayley}(G, \mathcal{S})$ に貼り付けた空間

$$X(G, \mathbb{P}, d_G) = \Gamma \cup \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{H}(g_i P_{(i)}).$$

を添加空間（augmented space) と呼び， $X(G, \mathbb{P}, d_G)$ で表す.

定義 (Groves-Manning)

G は $\mathbb{P}$ に関して相対双曲的 $\Leftrightarrow X(G, \mathbb{P}, d_G)$ が Gromov 双曲的.

先行結果

定理

G は $\mathbb{P}$ に関して相対双曲的とする.

- 任意の $P \in \mathbb{P}$ に対して $\mathrm{asdim} P < \infty$ なら，$\mathrm{asdim} G < \infty$ *(Osin)*.
- 任意の $P \in \mathbb{P}$ が性質 A を持つなら，G も性質 A を持つ *(Ozawa)*.
- 任意の $P \in \mathbb{P}$ が *Hilbert* 空間に粗埋め込み可能なら，G も *Hilbert* 空間に粗埋め込み可能 *(Dadarlat-Guentner)*.

Yu の結果により，これらの結論から，粗 Baum-Connes 予想が従う.

定理 (O-F '12)

- G：有限生成群
- $\mathbb{P} = \{P_1, \ldots, P_k\}$：無限指数をもつ，無限部分群の有限族
- G は $\mathbb{P}$ に関して相対双曲的

次の二つを仮定

- 各 P_i に対して，有限単体複体で分類空間 BP_i を実現できる．
- 各 P_i に対して，粗 *Baum-Connes* 予想が成り立つ．

このとき次の二つが成り立つ．

- 有限単体複体で分類空間 BG を実現できる．
- G に対して，粗 *Baum-Connes* 予想が成り立つ．

定理 (O-F '15)

- G：有限生成群,
- $\mathbb{P} = \{P_1, \ldots, P_k\}$：無限指数をもつ，無限部分群の有限族,
- G は $\mathbb{P}$ に関して相対双曲的．さらに次の二つを仮定
  - 各 P_i に対して，有限単体複体で分類空間 BP_i を実現できる.
  - 各 P_i は，*Polycyclic* 群，*CAT(0)*-群，双曲群のいずれか.
- H：*Polycyclic* 群,
- K：*CAT(0)*-群,
- F：双曲群,

このとき直積群 $G \times H \times K \times F$ に対し，粗 *Baum-Connes* 予想が成立する.

注意上述の条件を満たすような G, H, K, F はそれぞれ一つづつでなく，複数（有限個）あっても，それ等の直積に対して同じ結論が成り立つ

もくじ

粗コンパクト化

X: 固有距離空間（i.e. 有界閉集合はコンパクト）$f\colon X \to \mathbb{C}$ 連続
$r > 0$ に対し，$V_r f\colon X \to \mathbb{R}$

$$V_r f(x) := \sup\{|f(x) - f(y)| : y \in X, d(x,y) \leqslant r\}$$

f:Higson 関数 $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall r > 0$, $V_r f$ は無限遠で消える.

$$C_h(X) := \{f\colon X \to \mathbb{C} : f \text{ は有界，連続，　Higson}\}$$

$C_h(X)$ は 1 を持つ可換 C^*-環．$C_0(X)$ をイデアルとして含む.

定義
$\bar{Y}$: Y のコンパクト化

$\bar{Y}$が粗コンパクト化 $\Leftrightarrow$ $\bar{Y}$の連続関数の Y への制限は Higson 関数
$\Leftrightarrow C(\bar{Y}) \ni f \mapsto f|Y \in C_h(Y)$.

定義

$\bar{Y}$：Y のコンパクト化

$\bar{Y}$が粗コンパクト化 $\Leftrightarrow$ $\bar{Y}$の連続関数の Y への制限は Higson 関数

$$\Leftrightarrow C(\bar{Y}) \ni f \mapsto f|Y \in C_h(Y).$$

$\bar{Y}$：Y の粗コンパクト化，$\partial Y := \bar{Y} \backslash Y$.

$$\exists b\colon K_\bullet(C^*(Y)) \to \tilde{K}_{\bullet-1}(W)$$

$$\begin{tikzcd}
KX_\bullet(Y) \arrow[rr, "\exists T_{\partial Y}"] \arrow[dr, "\mu(Y)_\bullet"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \tilde{K}_{\bullet-1}(\partial Y) \\
& K_\bullet(C^*(Y)) \arrow[ur, "\exists b"'] &
\end{tikzcd}$$

特に，$T_{\partial Y}$ が単射なら $\Rightarrow \mu(Y)_\bullet$ も単射となる

問題

いつ

$$\begin{tikzcd}
KX_\bullet(Y) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\cong"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \tilde{K}_{\bullet-1}(\partial Y) \\
& K_\bullet(C^*(Y)) \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

となるか？

粗コンパクト化の例

- $\mathbb{R}^n \hookrightarrow D^n : x \mapsto x/(1 + \|x\|)$

$$KX_p(\mathbb{R}^n) \cong K_p(C^*(\mathbb{R}^n)) \cong \tilde{K}_{p-1}(S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (p = n) \\ 0 & (p \neq 0) \end{cases}$$

- $\mathbb{H}^n \hookrightarrow D^n$: Poincaré 球体モデル

$$KX_p(\mathbb{H}^n) \cong K_p(C^*(\mathbb{H}^n)) \cong \tilde{K}_{p-1}(S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (p = n) \\ 0 & (p \neq 0) \end{cases}$$

- Y：測地的 Gromov 双曲空間, ∂Y Gromov 境界

$$KX_p(Y) \cong K_p(C^*(Y)) \cong \tilde{K}_{p-1}(\partial Y)$$

- G：Polycyclic 群, $\exists n \in \mathbb{N}, \quad G \hookrightarrow D^n$

$$KX_p(\mathbb{R}^n) \cong K_p(C^*(\mathbb{R}^n)) \cong \tilde{K}_{p-1}(S^{n-1})$$

相対双曲群の境界（その 1）–Bowditch 境界

- G は $\mathbb{P} := \{P_1, \dots, P_k\}$ に関して相対双曲的な群とする.
- G は添加空間 $X(G, \mathbb{P}, d_G)$ に固有不連続に作用する.
- G の作用は添加空間 $X(G, \mathbb{P}, d_G)$ の Gromov 境界 $\partial X(G, \mathbb{P}, d_G)$ に伸びる.
- $\partial X(G, \mathbb{P}, d_G)$ を G の Bowditch 境界と呼び，$\partial(G, \mathbb{P})$ と表す. (G と $\mathbb{P}$ にしか依らない)

問題点

- $\partial(G, \mathbb{P})$ から $\mathbb{P}$ に属する部分群の情報を復元できない.
- 一般に $T_{\partial(G,\mathbb{P})} : KX_*(G) \to \tilde{K}_{*-1}(\partial(G, \mathbb{P}))$ は単射にならない

相対双曲群の境界（その 2）–blown-up 境界

設定

- G は $\mathbb{P} := \{P_1, \ldots, P_k\}$ に関して相対双曲的な群
- $\partial(G, \mathbb{P}) := X(G, \mathbb{P}, d_G)$ の Gromov 境界.
- $s_i \in \partial(G, \mathbb{P})$：ホロボール $\mathcal{H}(g_i P_{(i)})$ に対応する放物点.
- $\bar{P}_i$: P_i の粗コンパクト化 $(1 \leqslant i \leqslant k)$.
- $\partial P_i := \bar{P}_i \backslash P_i$.

構成のアイディア（詳細は予稿を参照）

- $\partial(G, \mathbb{P})$ から s_i を取り除き，$g_i \partial P_{(i)}$ を貼り付ける.

$$
\begin{aligned}
\partial(G, \mathbb{P})_1 &:= \partial(G, \mathbb{P}) \\
\partial(G, \mathbb{P})_{n+1} &:= \partial(G, \mathbb{P})_n \backslash \{s_n\} \cup g_n \partial P_{(n)}. \\
\partial^{\mathrm{bl}} G &:= \varprojlim \partial(G, \mathbb{P})_n \qquad \text{blown-up 境界}
\end{aligned}
$$

- $\overline{G}^{\mathrm{bl}} := G \cup \partial^{\mathrm{bl}} G$：$G$ の粗コンパクト化

blown-up 境界：具体例

$G < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ 非一様格子の場合

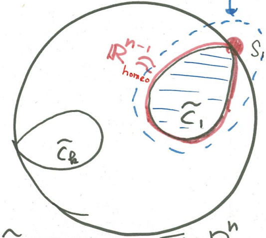
$M = \mathbb{H}^n / G$

$G \curvearrowright \overline{\mathbb{H}^n} \approx D^n$

$\boxed{\partial(G,\mathbb{P}) \approx S^{n-1}}$

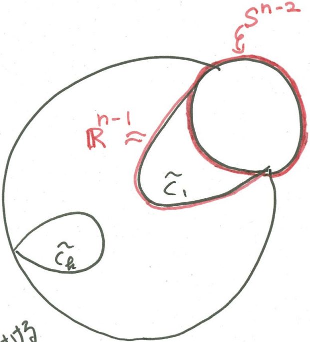
Bowditch境界

ホロボール($\approx \mathbb{R}^{n-1}$)の一点コンパクト化



$G \curvearrowright \widehat{M} \approx \mathbb{H}^n \subset \overline{\mathbb{H}^n} \approx D^n$

点s_1をBlow-upしてS^{n-2}を貼り付ける



$\boxed{\partial(G,\mathbb{P})_1 := \partial(G,\mathbb{P}) \setminus \{s_1\} \cup S^{n-2}}$

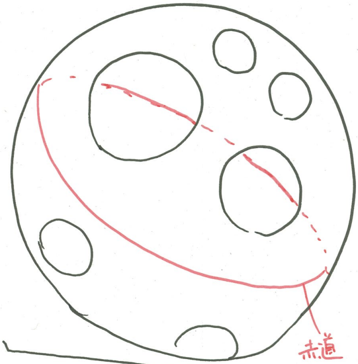
(1点) Blow-up境界

blown-up 境界：具体例

m-点 Blow-up

$$S^{n-1} \supset \partial(G,\mathbb{P})_m$$

$$\begin{array}{c} S^{n-1} \\ \cap \\ D^{n-1} \\ \wr\wr \\ \overline{\mathbb{H}}^n \end{array}$$



Blow-up境界

射影極限

$$\rightsquigarrow \quad \partial^{bl}G := \varprojlim \partial(G,\mathbb{P})_m = \bigcap \partial(G,\mathbb{P})_m$$

$$\underbrace{\dim \partial(G,\mathbb{P})_m = n-1} > \underbrace{n-2 = \dim \partial^{bl}G}$$

blown-up 境界を用いた粗 K ホモロジーの計算

定理

$G, \mathbb{P}$ を上の通りとし，各 P_i に対して，次の二つを仮定する.

- 有限単体複体で分類空間 BP_i を実現できると仮定する.
- $T_{\partial P_i}\colon KX_*(P_i) \to \tilde{K}_{*-1}(\partial P_i)$ ：同型

このとき， $T_{\partial G}\colon KX_*(G) \to \tilde{K}_{*-1}(\partial^{\mathrm{bl}} G)$. は同型.

Corollary

上記に加えて， P_i に対して粗 *Baum-Connes* 予想が成立すると仮定する．この時,

$$b\colon K_*(C^*(G)) \to \tilde{K}_{*-1}(\partial^{\mathrm{bl}} G)$$

は同型.

具体的な計算

- M：完備 Riemann 多様体．非コンパクト，有限体積，$-\alpha^2 < K_M < -\beta^2 (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$（i.e. カスプは有限個）．
- $n := \dim M$.
- $G := \pi_1(M)$.
- $\mathbb{P}$：G の $\tilde{M}$ への作用に関する（極大）放物部分群の共役類の代表類の集合.
- G は $\mathbb{P}$ に関して相対双曲的である.
- 各 P_i は，S^{m-2} を境界に持つような粗コンパクト化を持つ（O-F'13）
- $\partial^{\mathrm{bl}} G$：G の blown-up 境界

Corollary

$$K_p(C^*(G)) \cong KX_p(G) \cong \tilde{K}_{p-1}(\partial G) \cong \begin{cases} \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z} & (p = m-1) \\ 0 & (p = m) \end{cases}$$

境界とコホモロジー次元

定義

$$\mathrm{cd}(G) := \sup\{n : \text{ある } \mathbb{Z}G\text{-加群 } \mathbf{F} \text{ に対して } H^n(G;\mathbf{F}) \neq 0\}$$

$$\geqslant \max\{n : H^n(G;\mathbb{Z}G) \cong H_c^n(EG;\mathbb{Z}) \neq 0\}$$

命題

$\exists BG$：有限単体複体 $\Rightarrow$ 上の式で等号成立.

定理 (Bestvina-Mess)

G：双曲群，ねじれ元なし $\Rightarrow \dim \partial G = \mathrm{cd}(G) - 1$.

- Bestvina-Mess の手法を応用して，$\mathbb{P}$ に属する部分群がある技術的な仮定を満たす時，相対双曲群 $(G,\mathbb{P})$ と，blown-up 境界 $\partial^{\mathrm{bl}} G$ に対して，$\dim \partial^{\mathrm{bl}} G = \mathrm{cd}(G) - 1$ を示した．(F '15).

境界とコホモロジー次元

定義

$$\mathrm{cd}(G) := \mathsf{sup}\{n : \text{ある } \mathbb{Z}G\text{-加群 } \mathbf{F} \text{ に対して } H^n(G;\mathbf{F}) \neq 0\}$$
$$\geqslant \mathsf{max}\{n : H^n(G;\mathbb{Z}G) \cong H_c^n(EG;\mathbb{Z}) \neq 0\}$$

命題

$\exists BG$：有限単体複体 $\Rightarrow$ 上の式で等号成立.

定理 (Bestvina-Mess)

G：双曲群，ねじれ元なし $\Rightarrow \dim \partial G = \mathrm{cd}(G) - 1$.

- Bestvina-Mess の手法を応用して，$\mathbb{P}$ に属する部分群がある技術的な仮定を満たす時，相対双曲群 $(G,\mathbb{P})$ と，blown-up 境界 $\partial^{\mathrm{bl}}G$ に対して，$\dim \partial^{\mathrm{bl}}G = \mathrm{cd}(G) - 1$ を示した．(F '15).

Bowditch 境界と blown-up 境界の次元の比較：具体例

例

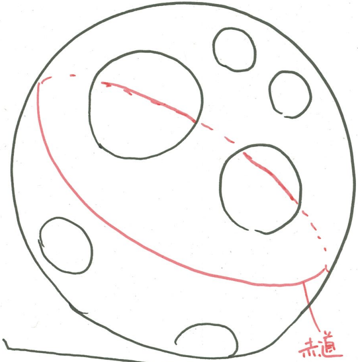
- 自由積
  - $\mathbb{Z}^n * \mathbb{Z}^n$ は $\{\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^n\}$ に対して相対双曲的.
  - Bowditch 境界 $\partial(\mathbb{Z}^n * \mathbb{Z}^n, \{\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^n\})$ は Cantor 集合
  - $\partial\mathbb{Z}^n = S^{n-1}$
  - $\partial^{\mathrm{bl}}(\mathbb{Z}^n * \mathbb{Z}^n)$ は Cantor 集合の中の可算無限個の点を S^{n-1} で blow-up したもの.
  - $\dim \partial(\mathbb{Z}^n * \mathbb{Z}^n, \{\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^n\}) = 0 < n-1 = \dim \partial^{\mathrm{bl}}(\mathbb{Z}^n * \mathbb{Z}^n)$
- 負曲率多様体の基本群
  - M：完備 Riemann 多様体．非コンパクト，有限体積, $n := \dim M$, $-\alpha^2 < K_M < -\beta^2 (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$
  - $G := \pi_1(M)$. $\mathbb{P}$ 前述の通り.
  - Bowditch 境界は S^{n-1} に同相.
  - $\dim \partial(G, \mathbb{P}) = n-1 > n-2 = \dim \partial^{\mathrm{bl}} G$.

Bowditch 境界と blown-up 境界の次元の比較：具体例

m-点 Blow-up

Blow-up 境界

$$\begin{array}{l} S^{n-1} \supset \partial(G,\mathbb{P})_m \\ \cap \\ D^{n-1} \\ \wr\wr \\ \overline{\mathbb{H}^n} \end{array}$$



射影極限

$m \longrightarrow$ $\partial^{bl} G := \varprojlim \partial(G,\mathbb{P})_m$

$= \bigcap \partial(G,\mathbb{P})_m$

$$\dim \partial(G,\mathbb{P})_m = n-1 > n-2 = \dim \partial^{bl} G$$