数学クイズ 2012

担当　深谷友宏

2012 年 7 月 30 日 (月), 31 日 (火)　東北大学理学部数学科オープンキャンパス

0　平面三角法

三角関数を学習済みの方は，この節を読飛ばしてください．三角関数とは，直角三角形の斜辺と他の二辺の比のことです．三角形 ABC において，$\angle ACB$ が直角で，$\theta = \angle ABC$ とします (図 1)．このとき $\sin\theta = |AC|/|AB|, \cos\theta = |BC|/|AB|$. と定めます．ここで $|AB|$ は辺 AB の長さを表します．90° より大きな角 θ に対しては次のようにして定めます．図 2 の様な (x, y)-平面上の半径 1 の円周 (単位円) を考えます．原点 $(0, 0)$ を O，また $A = (1, 0), P = (x, y)$ とおきます．そして $\angle AOP$ を反時計回りにはかった角度を θ とおきます．このとき $\sin\theta = y, \cos\theta = x$ と定めます．三角形は一辺とその両端の角度，もしくは二辺とその間の角度を決めると，三角形の形が一意に決まりますが，次の正弦定理や余弦定理は残りの辺の長さを与えてくれます．

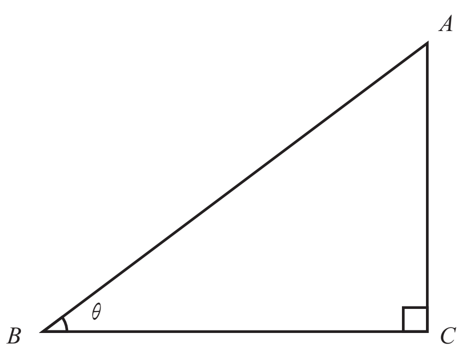

図 1　直角三角形

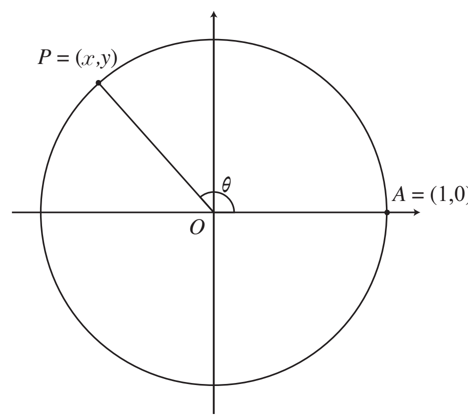

図 2　一般の角度に対する三角関数

定理 1 (正弦定理). 三角形 ABC の各辺の長さを a, b, c とし，対応する角度を α, β, γ とする (図 3 参照)．このとき次が成立する．

1. 正弦定理

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

2. 余弦定理

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

0.1　弧度法

円の一周を 360° と定めて角度を測る方法を度数法と呼びます．一方で半径 1 の円周の中心角 θ(度数法) の扇形の弧の長さを用いて角度を表す方法を弧度法と呼びます．単位はラジアンです．従って θ ラジアン $= 360\theta/2\pi$ 度となります．特に π ラジアン $= 180^\circ$, $\pi/3$ ラジアン $= 60^\circ$ です．

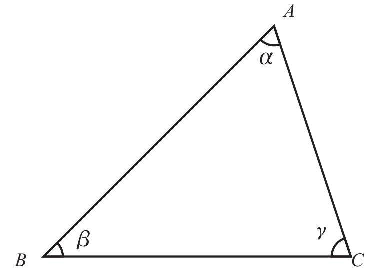

図 3　三角形 ABC

1 球面幾何学

1.1 球面三角法

皆さんは中学校や高校で平面上の図形の幾何学を学んだ事があると思います．しかし世の中には平らな幾何学だけではなく，曲がった空間の幾何学があります．そのなかでも古くから知られてるものが，球面上の図形の幾何学です．今日はこの球面の幾何学を覗いてみましょう．

球面と平面の交わりは必ず円になります．このとき，交わりの円の大きさが最大になるのは，平面が球面の中心を通るときです．このとき交わりの円を大円と呼びます．大円上の二点で定まる二つの弧のうち，長さの短い方を劣弧と呼びます．この大円が，平面上の幾何学における直線の役割を果たします．なぜかといいますと，球面上の二つの点を結ぶ曲線のうち，長さを最小にするものが劣弧だからです．このことは実際に球面上に紐をはわせて引っ張ってみる事により確認できます．さて，図 4 にあるような点 O を中心とする半径 1 の球面を考えます．この球面上に三つの大円を描き，交点をそれぞれ点 A, B, C と名付けます．球面三角形 ABC とは劣弧 AB, BC, CA で囲まれた図形のうち面積の小さいものの事です．内角 $\angle BAC$ とは弧 AB を含む平面と弧 AC を含む平面のなす角度の事です．また，半径を 1 としているので，弧 BC の長さは $\angle BOC$ に一致します．ただし角度は弧度法で表す事にします．この球面三角形 ABC に対して次の球面三角法が成り立ちます．

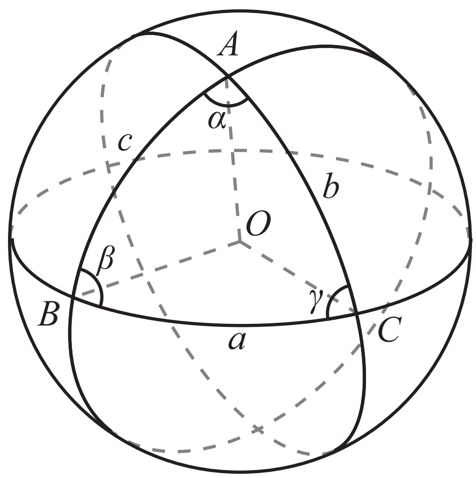

図 4 球面三角形

定理 **2.** 三辺の長さが a, b, c，対応する内角が α, β, γ の球面三角形に対して次の公式がなり立つ．

1. 正弦定理

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}$$

2. 余弦定理

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

問題 1. 余弦定理を証明してください．ヒント：点 A において弧 AB と接する直線と OB を延長した直線の交点を D とします．点 E も同様に定めます．そこで三角形 ODE に平面三角形の余弦定理を適用する事により，$\cos a$ を求めてください．

問題 2. 正弦定理を証明してください．正弦定理は余弦定理から計算によって導けますが，図の中に隠されたある量を調べる事により，直接証明する事もできます．是非この幾何学的な証明にも挑戦してみてください．

問題 3. この球面三角法を用いると，地球上の二点間の距離をそれぞれの緯度と経度から計算できます．表 1 を元に，様々な都市間の距離を計算してみてください．ただし地球は半径 6,357 km の球であると仮定します．また，半径 R の球面上の，三辺の長さが a, b, c である球面三角形に対する正弦定理は以下の通りです．

$$\cos\frac{a}{R} = \cos\frac{b}{R}\cos\frac{c}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos\alpha$$

都市	緯度	経度
仙台	38 N	140 E
東京	36 N	139 E
パリ	48 N	2 E
ロンドン	51 N	0 W
ニューヨーク	40 N	74 W
シドニー	34 S	104 E

表 1　各都市の緯度経度

θ	$\cos\theta$	θ	$\cos\theta$	θ	$\cos\theta$	θ	$\cos\theta$	θ	$\cos\theta$	θ	$\cos\theta$
0	1.000	15	0.966	30	0.866	45	0.707	60	0.500	75	0.259
1	1.000	16	0.961	31	0.857	46	0.695	61	0.485	76	0.242
2	0.999	17	0.956	32	0.848	47	0.682	62	0.469	77	0.225
3	0.999	18	0.951	33	0.839	48	0.669	63	0.454	78	0.208
4	0.998	19	0.946	34	0.829	49	0.656	64	0.438	79	0.191
5	0.996	20	0.940	35	0.819	50	0.643	65	0.423	80	0.174
6	0.995	21	0.934	36	0.809	51	0.629	66	0.407	81	0.156
7	0.993	22	0.927	37	0.799	52	0.616	67	0.391	82	0.139
8	0.990	23	0.921	38	0.788	53	0.602	68	0.375	83	0.122
9	0.988	24	0.914	39	0.777	54	0.588	69	0.358	84	0.105
10	0.985	25	0.906	40	0.766	55	0.574	70	0.342	85	0.087
11	0.982	26	0.899	41	0.755	56	0.559	71	0.326	86	0.070
12	0.978	27	0.891	42	0.743	57	0.545	72	0.309	87	0.052
13	0.974	28	0.883	43	0.731	58	0.530	73	0.292	88	0.035
14	0.970	29	0.875	44	0.719	59	0.515	74	0.276	89	0.017
15	0.966	30	0.866	45	0.707	60	0.500	75	0.259	90	0.000

表 2　$\cos\theta$ $0 \le \theta \le 90^\circ$ の値

2　平面の幾何学との関係

2.1　局所的な性質

私たちは地球の表面に住んでいるのですから，地上に三角形を描けば，それは球面三角形になります．ところが実際には，例えば学校の校庭に三角形を描けば，それは平面三角形と思えるでしょう．これは地球の半径が十分に大きいので，私たちの活動する範囲は「ほとんど平面である」とみなせるからです．この事を確認してみましょう．

問題 4. 半径 1 の球面上の，3 辺の長さが a, b, c である球面三角形を考えます．a, b, c が十分に小さいとき，球面三角形 ABC に対し，平面三角法の正弦定理や余弦定理 (定理 1) が近似的に成立する事を， 三角関数のテーラー展開を用いて示してください．ただし三角関数のテーラー展開は以下の通りです．

$$\sin x = x + (3\text{ 次以上の項})$$
$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + (3\text{ 次以上の項})$$

2.2　大域的な性質

二次元に広がった空間の事を曲面と呼びます．平面は平らな曲面であり，球面は「正の方向」に曲がった閉じた曲面です．前節でみた通り，球面も局所的には平面と見なす事ができたのですが，大域的にはこの曲がり具合の違いが現れてきます．

平面三角形の内角の和は常に π になりますが，球面三角形では内角の和が π より大きくなります．この事実は，曲面の曲がり方を表す「曲率」という概念を導入する事により，曲率と曲面の大域的な性質を結びつける「ガウスボンネの定理」によって統一的に理解する事ができます．ここではガウスボンネの定理の特別な場合を証明する事によって，球面三角形の内角の和が π より大きい事を確認してみましょう．

定理 3 (球面幾何学におけるガウス-ボンネの定理)**.** 半径 1 の球面上の球面三角形 ABC の内角を α, β, γ とするとき，その面積は

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi$$

で与えられる．

問題 5. ガウス-ボンネの定理 (定理 3) を証明してください．