数学クイズ 2012 解答

担当　深谷友宏

2012 年 7 月 30 日 (月), 31 日 (火)　東北大学理学部数学科オープンキャンパス

1　球面幾何学

1.1　球面三角法

問題 1. 図 2 のように，点 A で弧 AB と接する直線と直線 OB の交点を D とし，同様に点 E を定めます．三角形 ADE に平面三角形の余弦定理を適用すると，

$$|DE|^2 = |AD|^2 + |AE|^2 - 2|AD||AE|\cos\alpha. \tag{1}$$

ここで，$|DE|$ は辺 DE の長さを表します (他も同様)．三角形 ODE に平面三角形の余弦定理を適用すると，

$$2|OD||OE|\cos a = |OD|^2 + |OD|^2 - |DE|^2. \tag{2}$$

角 OAD は直角で，$OA = 1$ なので，$|OD|^2 = 1 + |AD|^2$．同様に $|OE|^2 = 1 + |AE|^2$ を得ます．これと式 (1) を用いて式 (2) の右辺を変形すると，

$$2|OD||OE|\cos a = 2 + 2|AD||AE|\cos\alpha. \tag{3}$$

を得ます．最後に，$|OD| = 1/\cos c$, $|AD| = \sin c/\cos c$, $|OE| = 1/\cos b$, $|AD| = \sin b/\cos b$ を使って整理すると，余弦定理

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha.$$

が得られます．

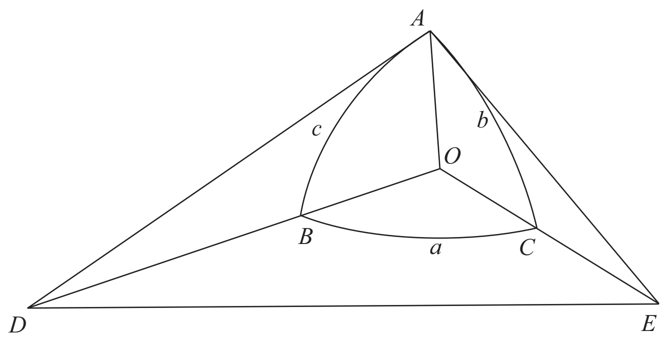

図 2

問題 2. 四面体 $OABC$ の体積 V を求めてみます．点 A から $\triangle OBC$ に下ろした垂線の交点を G とします．また，AG を含み OB と垂直に交わる平面と OB の交点を F とします．すると $|AF| = \sin c$ です．このとき GF は OB と垂直に交わるので $\angle AFG = \beta$ です．従って $|AG| = |AF|\sin\beta = \sin c\sin\beta$．また二等辺三角形 OBC の面積は $\frac{1}{2}\sin a$ なので，四面体 $OABC$ の体積は

$$V = \frac{1}{6}\sin c\sin a\sin\beta$$

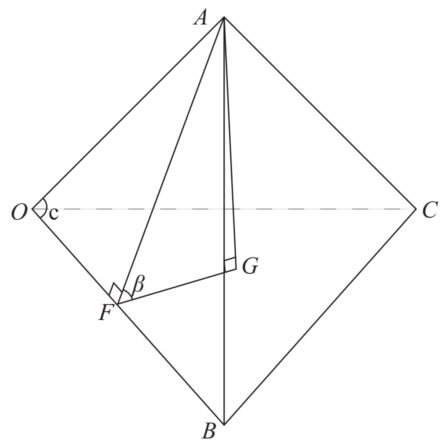

図 3　四面体 $OABC$

となります．ところで今は三角形 OBC を底面として体積を計算したのですが，当然三角形 OCA や OAB を底面として体積を計算しても同じ量になるはずです．従って次の等式を得ます．

$$6V = \sin c \sin a \sin\beta = \sin b \sin c \sin\gamma = \sin a \sin c \sin\alpha. \tag{4}$$

式 (4) の各辺を $\sin a \sin b \sin c$ で割って逆数を取り，正弦定理を得ます．

問題 3. 地球上の二地点を P, Q とし，それぞれの緯度を φ_p, φ_q，経度を ψ_p, ψ_q とします．説明を簡単にするために，P, Q は共に北半球の東経 0° から東経 180° の範囲にあると仮定します．また北極を N とし，地球の半径を R とします．球面三角形 PNQ に余弦定理を適用して，P と Q 間の距離 x を求めてみましょう．まず，$\angle PNQ = |\psi_p - \psi_q|$ であり，$\angle NOP = 90 - \varphi_p, \angle NOQ = 90 - \varphi_q$ です．すると余弦定理より

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi R}{360}\cos^{-1}(\cos(90-\varphi_p)\cos(90-\varphi_q) + \sin(90-\varphi_p)\sin(90-\varphi_q)\sin(\psi_p-\psi_q)) \\ &= \frac{\pi R}{360}\cos^{-1}(\sin\varphi_p \sin\varphi_q + \cos\varphi_p\cos\varphi_q\sin(\psi_p-\psi_q)). \end{aligned}$$

問 1 では半径 1 の球面を考察しましたが，ここでは半径 R の球面を考察している事に注意してください．この式に各都市の緯度と経度を当てはめれば，都市間の距離が計算できます．

2　平面の幾何学との関係

2.1　局所的な性質

問題 4. 3 辺の長さが a, b, c である三角形の ABC に対する球面三角法の余弦定理

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos\alpha \tag{5}$$

をテーラー展開すると

$$1 - \frac{a^2}{2} = \left(1 - \frac{b^2}{2}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2}\right) + bc\cos\alpha + (a, b, c \text{ についての 3 次以上の項}). \tag{6}$$

展開して整理すると，次が得られます．

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha + (a, b, c \text{ についての 3 次以上の項}). \tag{7}$$

これは球の半径に対して三角形の各辺が十分に小さければ，平面の余弦定理が「ほとんど成立する」ことを意味しています．

2.2　大域的な性質

問題 5. 以下の証明は [1] から引用しました．まず，弧 AB, BC, CD を定めるそれぞれの大円で分けられる領域に，図 4 の様に記号を付けます．また A, B, C の対心点を A^*, B^*, C^* とします．このとき，I と II の面積の和は $(\alpha/2\pi)4\pi = 2\alpha$ です．同様に I と III，I と IV の面積の和はそれぞれ 2β, 2γ です．IV と IV* の面積が等しいので，I, II, III, IV の面積の和は半球の面積 2π に等しくなり，

$$2(\triangle ABC \text{ の面積}) = 2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2\pi$$

となり，主張を得ます．

このことから，球面三角形の内角の和は常に π より大きく，3π より小さい事が分かります．このように球面三角形は大域的には平面三角形とは異なる性質を持っている事が分かります．

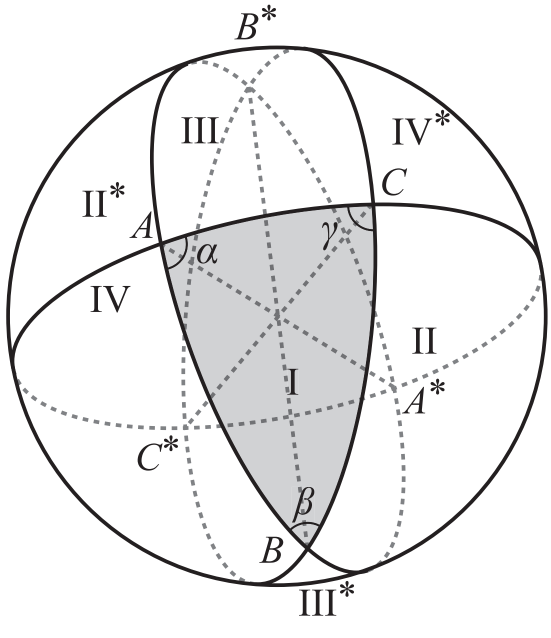

図 4　球面三角形に対するガウス-ボンネの定理

参考文献

[1] 奥村善英 谷口雅彦. **双曲幾何学への招待**. 培風館, 1996.