数学クイズ 2015

担当　深谷友宏

2015 年 7 月 29 日 (水), 30 日 (木)　東北大学理学部数学科オープンキャンパス

1　内接および外接する正多角形で近似する．

アルキメデスの方法は，円に内接する正多角形と，外接する正多角形で円周の長さを近似することです．以下では，半径 1 の円を考えます．この円の周の長さは 2π です．この円に内接する正 n 多角形の周の長さを p_n とし，外接する正 n 角形の周の長さを q_n とします．

$\boxed{1}$　次の不等式が成り立つことを示せ．（注意：$p_n < 2\pi$ は簡単．$2\pi < q_n$ は少し工夫が必要．）

$$p_n < 2\pi < q_n. \tag{1}$$

答. 半径 1 の円に内接する正 n 角形の頂点を，（反時計回りに）順に $P_1, P_2, \ldots, P_n$ とします．ただし，便宜上 $P_{n+1} = P_1$ と約束します．このとき，

$$\overline{P_iP_{i+1}} < (\text{弧 } P_iP_{i+1} \text{の長さ})$$

ですから，直ちに $p_n = \sum_{i=1}^n \overline{P_iP_{i+1}} < 2\pi$ を得ます．次に，外接する正 n 角形の頂点を，（反時計回りに）順に $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ とします．先ほどと同様に $Q_{n+1} = Q_1$ と約束します．外接する正 n 角形の場合，内接する場合のような，辺の長さと弧の長さの比較を直接使うことはできません．その代わりに面積の比較を用います．

$$(\text{半径 1 の円の面積}) < (\text{外接する正 } n \text{ 角形の面積}).$$

ここで，$\triangle OP_iP_{i+1}$ の面積は，$\overline{P_iP_{i+1}}/2$ ですから，$\pi < (\text{外接する正 } n \text{ 角形の面積}) = \sum_{i=1}^n \overline{P_iP_{i+1}}/2 = q_n/2$ を得ます．　□

不等式 (1) より，p_n および q_n の値が求まれば，円周率 π の近似値が得られることになります．p_n, q_n の値を計算するために，n を二倍して $2n$ に変えた時に，これらの値がどのように変化するか考察します．

図 1 において，$\theta = 180°/n$ とし，$\overline{BD} = a$, $\overline{AB} = a'$, $\overline{AE} = b$, $\overline{AF} = b'$ とおきます．このとき

$$b' = \frac{2ab}{a+b}, \qquad a' = \sqrt{ab'} \tag{2}$$

となることを示します．

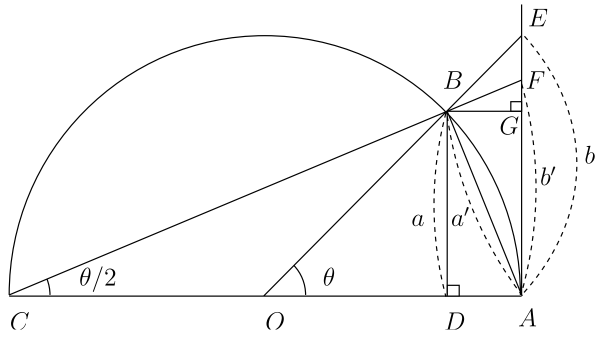


図 1

(2) の最初の等式は，次の等式と同値です（各自で確かめてください）．

$$\frac{b-b'}{b'-a}=\frac{b}{a}. \tag{3}$$

円周角と中心角の関係から，$\angle OCB = OBC = \theta/2$ です．

$\boxed{2}$ $\angle FBG = \angle EBF = \theta/2$ を示せ．

答. 辺 BG と CA は平行なので，$\angle FBG = \angle BCA = \theta/2$．同様に $\angle EBG = \angle BOA = \theta$．よって $\angle EBF = \angle EBG - \angle FBG = \theta/2$． □

三角形 $\triangle EBG$ を図 2 に拡大して描きます．

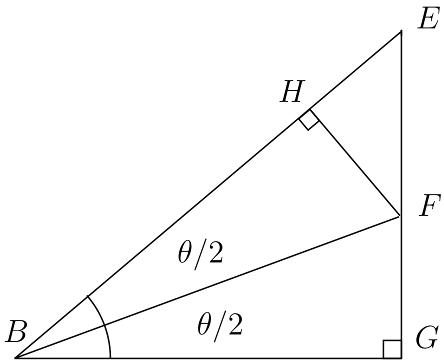


図 2

$\boxed{3}$ 図 2 に着目して，等式

$$\frac{\overline{EF}}{\overline{FG}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{BG}} \tag{4}$$

を示せ．

答. 三角形 $\triangle BEF$ の面積を $|\triangle BEF|$ と表すことにします．

$$|\triangle BEF| = \frac{1}{2}\overline{EF}\times\overline{BG} = \frac{1}{2}\overline{BE}\times\overline{FH}.$$

また，三角形 $\triangle FHB$ と $\triangle FGB$ は合同なので，$\overline{FH}=\overline{FG}$．よって (4) を得ます． □

a, a', b, b' の定義より，$\overline{EF}=b-b'$, $\overline{FG}=b'-a$ なので， (4) より

$$\frac{b-b'}{b'-a}=\frac{\overline{BE}}{\overline{BG}}$$

となります．

$\boxed{4}$ 三角形の相似に着目して，

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BG}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{DB}}=\frac{b}{a} \tag{5}$$

を示せ．

答. 三角形 $\triangle BEG$ と $\triangle OBD$ は相似なので，等式

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BG}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}}$$

が成り立ちます．同様に三角形 $\triangle OAE$ と $\triangle ODB$ は相似なので，等式

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{DB}}$$

が成り立ちます．$\overline{OB} = \overline{OA}$ なので，上の二つの等式をつなげて，(5) を得ます． □

以上より，等式 (3)（従って (2) の最初の等式）を示すことができました．次に (2) の二番目の等式を示します．

$\boxed{5}$ 図 1 に表れる，相似な三角形に着目して次の等式を示せ．

$$\frac{a}{a'} = \frac{a'}{b'}$$

答. $\angle ABD = \angle BAG$．また $\angle ABC$ が直角なので，$\angle ABF$ も直角．従って $\angle ABF = \angle BDA$ である．よって三角形 $\triangle ABD$ と $\triangle FAB$ は相似．以上より $a/a' = a'/b'$． □

以上により $a' = \sqrt{ab'}$ が得られました．

漸化式

式 (2) を使って，p_n と q_n が次の漸化式を満たすことを示しましょう．

$$q_{2n} = \frac{2p_nq_n}{p_n+q_n}, \qquad p_{2n} = \sqrt{p_nq_{2n}}. \tag{6}$$

図 3, 4 に $n=6$ の場合の図を描いておきます．内接する正 n 角形の一辺の長さが $\overline{BB'} = 2a$ なので，周の長さは $p_n = 2na$ となる．同様に，外接する正 n 角形の一辺の長さは $\overline{EE'} = b$ なので，その周の長さは $q_n = 2nb$ となります．また，内接する正 $2n$ 角形の一辺の長さは $\overline{AB} = a'$ なので，周囲の長さは $p_{2n} = 2na'$ です．

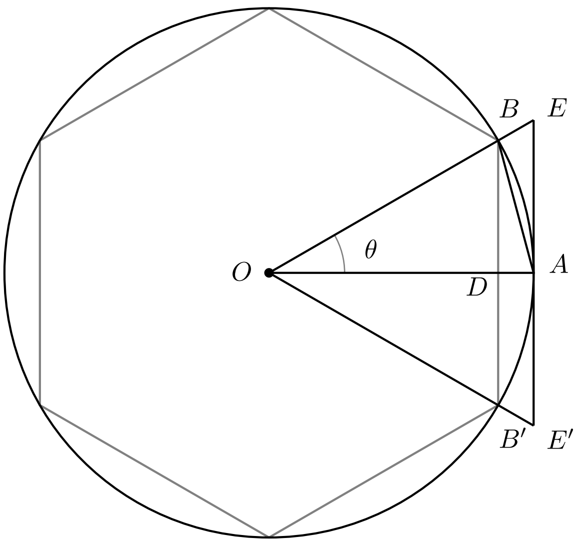


図 3

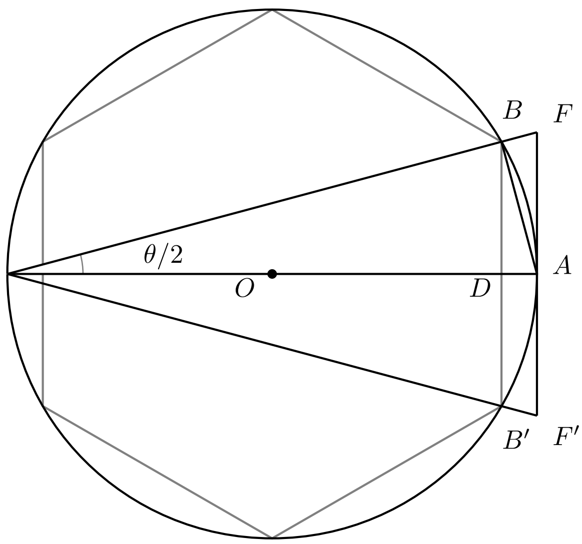
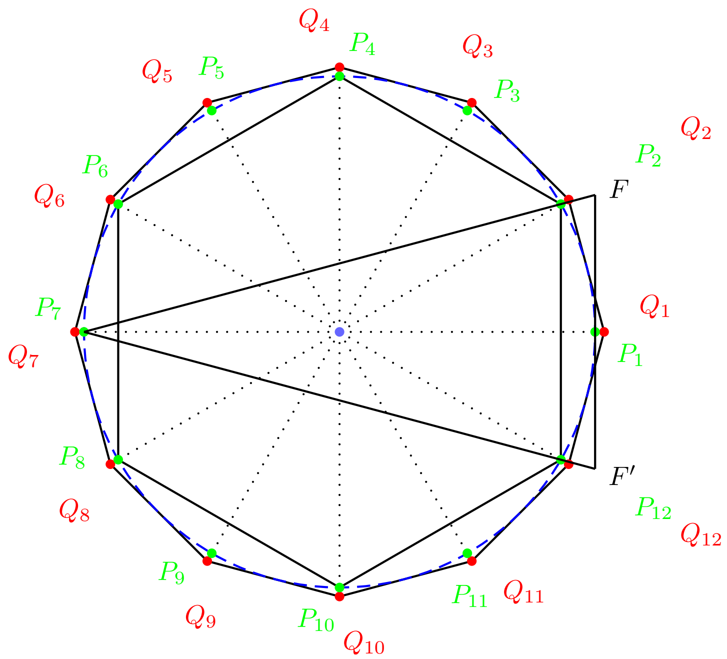
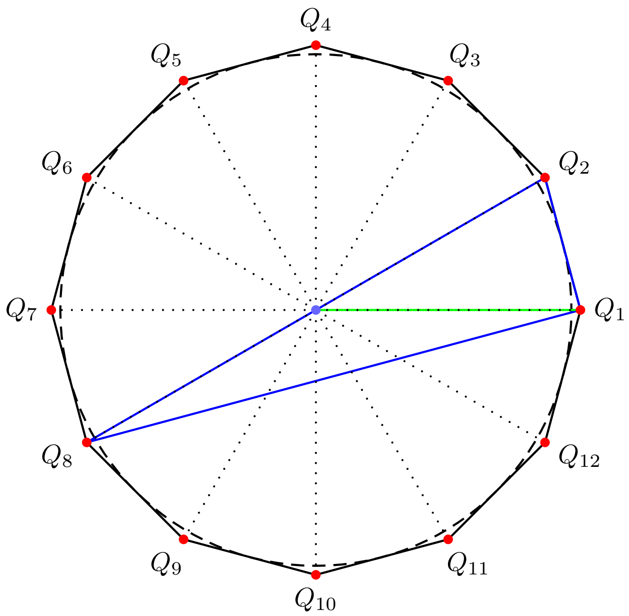


図 4

$\boxed{6}$ 外接する正 $2n$ 角形の一辺の長さは $\overline{FA} = b'$ であることを示せ．（やや難）（ヒント：$n = 3$ の場合に図を描いてみよ）

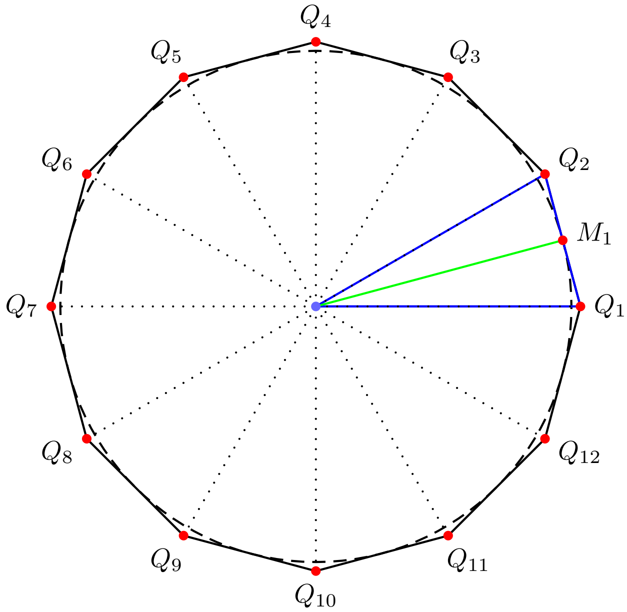
答. 先ほどと同様に，内接する正 $2n$ 角形の頂点を，反時計回りに順に $P_1, \ldots, P_{2n}$ とし，外接する正 $2n$ 角形の頂点を，反時計回りに順に $Q_1, \ldots, Q_{2n}$ とします．三角形 $\triangle P_1 F P_{n+1}$ と $\triangle Q_1 Q_2 Q_{n+2}$ が合同であることを示せば，$\overline{Q_1 Q_2} = \overline{FP_1} = \overline{FA} = b'$ を得ます．以下に $n = 6$ の場合の図を描きます．





正 $2n$ 角形の対称性より，辺 Q_1Q_2 と $Q_{n+1}Q_{n+2}$ は平行です．さらに，直線 Q_1Q_{n+2} は辺 Q_1Q_2 及び $Q_{n+1}Q_{n+2}$ と垂直に交わります．よって辺 Q_1Q_{n+2} は直径に等しく，$\overline{Q_1Q_{n+2}} = \overline{P_1P_{n+1}}$ となります．

また，$\angle Q_2Q_{n+2}Q_1 = (1/2)\angle Q_2OQ_1 = 360^\circ/4n$ です．（O は円の中心），一方で円周角の定理より $\angle FP_{n+1}F' = (1/2)\angle P_2OP_1 = 360^\circ/2n$．ゆえに $\angle FP_{n+1}P_1 = 360^\circ/4n = \angle Q_2OQ_{n+2}$．以上で直角三角形 $\triangle P_1FP_{n+1}$ と $\triangle Q_1Q_2Q_{n+2}$ が合同であることが示されました． $\square$



以上より，$q_{2n} = 2nb'$ だと分かりました．従って (2) を使えば， (6) が成り立つことが直ちに分かります．(6) を繰り返し使えば，

$$(p_n, q_n) \to (p_{2n}, q_{2n}) \to (p_{4n}, q_{4n})$$

というように，次々と計算していくことができます．

$\boxed{7}$ p_6, q_6 の値を直接求めよ．また，それを用いて p_{12}, q_{12} の値を求め，円周率 π の近似値を計算せよ．

答. 内接する正 6 角形の一辺の長さは明らかに 1 です．外接する正 6 角形の一辺の長さを求めるには，図 3 の相似な三角形 $\triangle OBB'$ と $\triangle OEE'$ を利用します．$\overline{OD} = \sqrt{3}/2$, $\overline{BB'} = \overline{OA} = 1$ より，

$$\overline{EE'} = \overline{BB'} \times \frac{\overline{OA}}{\overline{OD}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

を得ます．従って $q_6 = 4\sqrt{3}$ です．これより次の近似を得ます．

$$3 < \pi < 2\sqrt{3} (= 3.464 \cdots)$$

漸化式 (6) を用いれば，$q_{12} = 24(2-\sqrt{3}), p_{12} = 6\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$ を得ます．従って

$$3.1058 < 3\sqrt{2}(\sqrt{3}-1) < \pi < 12(2-\sqrt{3}) < 3.2154$$

という近似を得ます． □

2 微積分を使った手法

アルキメデス以後，正多角形を使うというアイディアから抜け出せたのは，彼が生きた時代から千数百年もたった，17 世紀の事でした．ここでは微積分を習った人向けに，円周率を単純な有理数の無限和として表す公式について学んでみましょう．

$\boxed{8}$ $x = \tan\theta$ の逆関数を $\theta = \mathrm{Arctan}\, x$ と表す．ただし，$-\pi/2 \le \theta\pi/2$ とする．合成関数の微分法則を用いて，

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Arctan}\, x = \frac{1}{1+x^2} \tag{7}$$

であることを示せ.

答. $\mathrm{Arctan} \circ \tan\theta = \theta$ なので，合成関数の微分法則より

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Arctan}\, x \times \frac{d}{d\theta}\tan\theta = \frac{d}{dx}\mathrm{Arctan}\, x \times \frac{1}{\cos^2\theta} = 1.$$

よって (7) を得ます. □

等比級数の公式より次を得ます.

$$\frac{1}{1+u^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u^{2k} + \frac{(-1)^{n+1}u^{2(n+1)}}{1+u^2}. \tag{8}$$

x を $-1 \leq x \leq 1$ を満たす実数とします. 式 (8) の両辺を 0 から x まで積分して

$$\mathrm{Arctan}\, x = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} + \int_0^x \frac{(-1)^{n+1}u^{2(n+1)}}{1+u^2}du. \tag{9}$$

式 (9) の最後の積分を $R_n(x)$ と書くことにします.

$\boxed{9}$ 極限 $\lim_{n\to\infty}|R_n(x)| = 0$ を示せ.

答. $-1 \leq x \leq 1$ の範囲で,

$$|R_n| = \left|\int_0^x \frac{(-1)^{n+1}u^{2(n+1)}}{1+u^2}du\right| \leq \int_0^{|x|} u^{2(n+1)}du = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3} \to 0 \quad (n \to \infty \text{ のとき}).$$

□

以上より $\mathrm{Arctan}\, x$ の $x=0$ の周りでのテーラー展開

$$\mathrm{Arctan}\, x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 + \cdots + (-1)^k\frac{1}{2k+1}x^{2k+1} + \cdots \tag{10}$$

式 (10) において $x=1$ を代入すれば,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \cdots + (-1)^k\frac{1}{2k+1} + \cdots \tag{11}$$

を得ます. ただし，この公式の収束は非常に遅いです. tan の加法定理をうまく組み合わせることにより，ずっと早く収束する公式を見つけることができますので，興味を持った人は自分で考えてみるか，調べてみてください.

参考文献

[1] 小林昭七. 円の数学. 裳華房, 1999.